$$\int_0^{2/\sqrt{5}} x \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{La sostituzione } 1+x^2 = t, |x| = \sqrt{t-1} \text{ porta l'integrale a}$$

$$\int_1^{9/5} \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{t-1} + \sqrt{t}} dt \text{ e poi sostituiamo } t = \cosh^2 u \ (u \geq 0) \text{ da cui}$$

$$\int_{\cosh^{-1}(1)}^{\cosh^{-1}(3/\sqrt{5})} \sinh u \cosh u \sqrt{\cosh u + \sinh u} du = \int_{\cosh^{-1}(1)}^{\cosh^{-1}(3/\sqrt{5})} \frac{1}{4} (e^{2u} - e^{-2u}) e^{\frac{u}{2}} du =$$

$$= \int_{\cosh^{-1}(1)}^{\cosh^{-1}(3/\sqrt{5})} \frac{1}{4} (e^{\frac{5}{2}u} - e^{-\frac{3}{2}u}) du = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}u} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}u} \right) \Big|_{\cosh^{-1}(1)}^{\cosh^{-1}(3/\sqrt{5})}$$

da $\cosh u = \sqrt{t}$ abbiamo $e^u + e^{-u} = 2\sqrt{t}$ da cui $e^u = \sqrt{t} \pm \sqrt{t-1}$ ma solo quella con il segno + va bene in quanto, essendo $u \geq 0$, dovrebbe aversi $\sqrt{t} - \sqrt{t-1} \geq 1$ ma questo è chiaramente impossibile perché equivarrebbe a $2\sqrt{t-1} < 0$. Quindi $\cosh^{-1}(1) = \ln(1 + \sqrt{1-1}) = 0$, $\cosh^{-1}(3/\sqrt{5}) = \ln(\frac{3}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{9}{5} - 1}) = \ln(\sqrt{5})$ e

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}u} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}u} \right) \Big|_{\cosh^{-1}(1)}^{\cosh^{-1}(3/\sqrt{5})} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} e^{\frac{5}{2}u} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}u} \right) \Big|_0^{\ln \sqrt{5}} = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{5^{3/4}} - \frac{4}{5} \right)$$

Si poteva sostituire $t = \cosh^2 u$ e prendere $u \leq 0$. In tal caso avremmo avuto $e^u = \sqrt{t} - \sqrt{t-1}$. Come due studenti hanno osservato, la sostituzione $x + \sqrt{1+x^2} = t^2$ andava bene purché l'inversione si fosse esplicitata attraverso $(t^2 - x)^2 = 1 + x^2$